

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

10 класс

1. Взяли 2015 последовательных натуральных чисел, делящихся на 2015. Может ли их сумма быть 2015-й степенью некоторого натурального числа?

Составитель Исаев К.П.

2. В квадратном трёхчлене $x^2 + px + q$ p и q - целые числа, дающие при делении на 3 остатки 2. Может ли этот трёхчлен иметь рациональные корни?

Составитель Исаев К.П.

3. На левой половине доски записано число 21, а на правой число 8. Разрешается взять произвольное число a с левой половины доски и произвольное число b с правой половины доски, вычислить числа ab , $a^3 + b^3$ и записать ab на левую, а $a^3 + b^3$ на правую сторону доски соответственно. Можно ли при помощи таких операций получить на доске число 2013201420152016?

Составитель Трунов К.В.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке K . Прямая пересекает большую окружность в точках A и B , а меньшую окружность в точках C и D . Точка C лежит между A и D . Докажите, что $\angle AKC = \angle BKD$.

Составитель Исаев К.П.

5. В правильном 9-угольнике все стороны и диагонали покрасили в красный или в синий цвета. Оказалось, что нет трех вершин 9-угольника, соединенных отрезками, образующими красный треугольник. Докажите, что найдутся 4 вершины 9-угольника, образующие четырехугольник, все стороны и диагонали которого покрашены в синий цвет.

Составитель Исаев К.П.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10 класс

1. Взяли 2015 последовательных натуральных чисел, делящихся на 2015. Может ли их сумма быть 2015-й степенью некоторого натурального числа?

Решение.

Обозначим первое из указанных чисел a . Тогда второе число – $a+2015$, третье число – $a+2015 \cdot 2$ и т.д. Последнее из чисел – $a+2015 \cdot 2014$. Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 2015. Их сумма S равна

$$\frac{2a + 2015 \cdot 2014}{2} \cdot 2015 = (a + 1007 \cdot 2015) \cdot 2015.$$

Возьмем, например, $a = 2015^{2014} - 1007 \cdot 2015$. Тогда

$$S = 2015^{2015}.$$

Ответ: может.

Рекомендации по проверке.

Ответ без указания чисел – 0 баллов.

Любой пример, показывающий, что такие числа существуют, – 7 баллов.

2. В квадратном трёхчлене $x^2 + px + q$ p и q - целые числа, дающие при делении на 3 остатки 2. Может ли этот трёхчлен иметь рациональные корни?

Решение.

По условию $p = 3n + 2$ и $q = 3m + 2$, где n и m - некоторые целые числа. Тогда

$$D = (3n + 2)^2 - 4(3m + 2) = 3(3n^2 + 4n - 4m - 2) + 2.$$

Дискриминант даёт остаток 2 при делении на 3. Квадрат целого числа не может давать при делении на 3 остаток 2:

- 1) если $k = 3l$, то $k^2 = 9l^2$ - остаток 0;
- 2) если $k = 3l + 1$, то $k^2 = 9l^2 + 6l + 1$ - остаток 1;
- 3) если $k = 3l + 2$, то $k^2 = 9l^2 + 12l + 4$ - остаток 1.

Таким образом, дискриминант нашего квадратного трёхчлена не является точным квадратом, поэтому рациональных корней быть не может.

Ответ: не может.

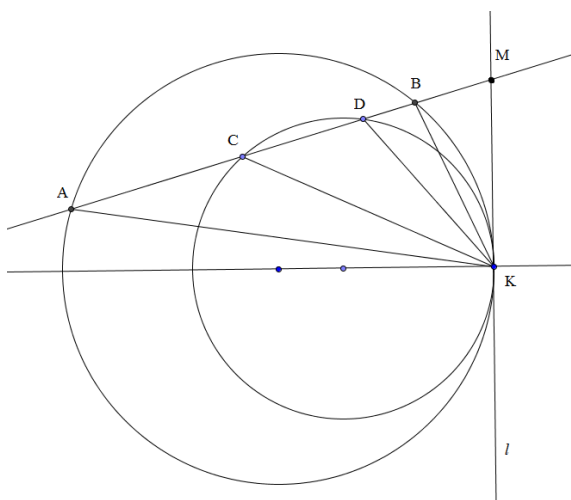
3. На левой половине доски записано число 21, а на правой число 8. Разрешается взять произвольное число a с левой половины доски и произвольное число b с правой половины доски, вычислить числа ab , $a^3 + b^3$ и записать ab на левую, а $a^3 + b^3$ на правую сторону доски соответственно. Можно ли при помощи таких операций получить на доске число 2013201420152016?

Ответ: нет

Решение.

Заметим, что число $21 : 7$, а 8 даёт остаток 1. Значит после первой операции число $ab : 7$, а число $a^3 + b^3$ при делении на 7 даёт остаток 1. Таким образом получаем, что на левой доске мы запишем число кратное 7, а на правой число дающее остаток 1 при делении на 7. Следовательно, после нескольких таких операций на левой доске будут записаны числа кратные 7, а на правой числа дающие остаток 1, но число 2013201420152016 даёт остаток 3 при делении на 7.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке K . Прямая пересекает большую окружность в точках A и B , а меньшую окружность в точках C и D . Точка C лежит между A и D . Докажите, что $\angle AKC = \angle BKD$.



Решение.

Пусть l – общая касательная к окружностям в точке K ,
 $l \cap (AB) = M$.

$$\angle BKD = \angle DKM - \angle BKM$$

$\angle BKM$ – угол между касательной и секущей большей окружности. Следовательно,

$$\angle BKM = \angle BAK.$$

$\angle DKM$ – угол между

касательной и секущей меньшей окружности. Следовательно,
 $\angle DKM = \angle DCK$.

Итак, $\angle BKD = \angle DCK - \angle BAK$.

Из $\triangle ACK$

$$\begin{aligned} \angle AKC &= 180^\circ - \angle BAK - \angle ACK = 180^\circ - \angle BAK - (180^\circ - \angle DCK) = \\ &= \angle DCK - \angle BAK = \angle BKD, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5. В правильном 9-угольнике все стороны и диагонали покрасили в красный или в синий цвета. Оказалось, что нет трех вершин 9-угольника, соединенных отрезками, образующими красный треугольник. Докажите, что найдутся 4 вершины 9-угольника, образующие четырехугольник, все стороны и диагонали которого покрашены в синий цвет.

Решение.

Предположим, что существует вершина A , из которой выходит 4 или более красных отрезков: AB, AC, AD, AE . Так как красных треугольников быть не может, то вершины B, C, D и E соединены синими отрезками. Искомый четырехугольник найден.

Рассмотрим случай, когда из каждой вершины выходит менее 4

красных отрезков. Тогда найдется вершина A , из которой выходит менее трех красных отрезков, потому что если бы из всех 9 вершин выходило ровно 3 красных отрезка, то их было бы $\frac{9 \cdot 3}{2}$ - не целое число. Тогда из A выходит не менее 6 ребер

синего цвета. Рассмотрим 6 соответствующих вершин. Если среди них есть три вершины, соединенных отрезками, образующими синий треугольник, то искомый четырехугольник образуют эти три точки и точка A .

Но среди шести вершин всегда найдется 3, соединенных отрезками одного цвета. Действительно, возьмем любую из этих 6 вершин X . Из нее выходит по крайней мере три одноцветных отрезка. Три конца этих отрезков либо попарно соединены отрезками другого цвета, либо среди них найдутся две точки, соединенных отрезком того же цвета, что и с X . В обоих случаях получается одноцветный треугольник.