

11 класс

1. Для многочлена $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ вычислены значения для подряд идущих натуральных чисел от 1 до 2021: $P(1), P(2), P(3), \dots, P(2021)$. Сколько квадратов целых чисел среди этих значений?
2. Решите уравнение:
$$x^2 - 2x \sin x - 2 \cos x + 2 = 0.$$
3. Квадратный трёхчлен $P(x)$ выбран таким образом, что каждый из многочленов $P(x) - 2x + 4$ и $P(x) + x - 2$ имеет ровно один вещественный корень. Докажите, что трёхчлен $P(x)$ не имеет вещественных корней.
4. В треугольнике ABC угол C больше угла A . На стороне AB взята точка D так, что $BD = BC$. Продолжение биссектрисы BE треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке F . Докажите, что около четырехугольника $ADEF$ можно описать окружность.
5. В кубе с ребром 2 выбраны главная диагональ и скрещивающееся с ней ребро. На выбранном ребре взята точка так, что сечение куба плоскостью, проходящей через выбранную главную диагональ и выбранную точку, имеет наименьший периметр. Найдите площадь полученного сечения.
6. Антон и Борис за одним столом играют в следующую игру. Перед ними на столе лежат 2 монеты. У каждого есть неограниченное количество монет. Каждый по очереди делает ход: увеличивает количество монет на столе, добавляя некоторое количество своих так, что добавленное меньше находящегося на столе. Первым ходит Антон. Выигрывает тот, после хода которого на столе будет ровно 2022 монеты. Кто выигрывает при правильной игре?

10 класс

1. Существуют ли числа a и b такие, что уравнения $x^2 + (a - 1)x + b = 0$ и $x^2 + (a + 1)x + b = 0$ имеют по два различных корня, а уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней?
2. Дробь $\frac{360^{25}}{100!}$ сократили и получили несократимую дробь $\frac{m}{n}$. Найдите m . ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ – произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно).
3. Сколько имеется различных натуральных нечетных семизначных чисел, в десятичной записи которых используются ровно три разные цифры?
4. Рассматривается треугольник DEO . Биссектриса угла E пересекает сторону DO в точке E_1 , а серединный перпендикуляр к стороне DO – в точке R . Известно, что $DR = a$, $EE_1 = b$, $DE_1 = c$. Найдите длину стороны EO .
5. Найдите функцию $f(x)$, определенную при всех $x \neq 1$, которая удовлетворяет уравнению $(2x + 1)f(x) + (x + 5)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$
6. Дана последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_0 = 9$, а остальные члены задаются рекуррентно $x_n = 3x_{n-1}^4 + 4x_{n-1}^3$. Докажите, что десятичная запись x_9 содержит не менее 400 девяток подряд.

9 класс

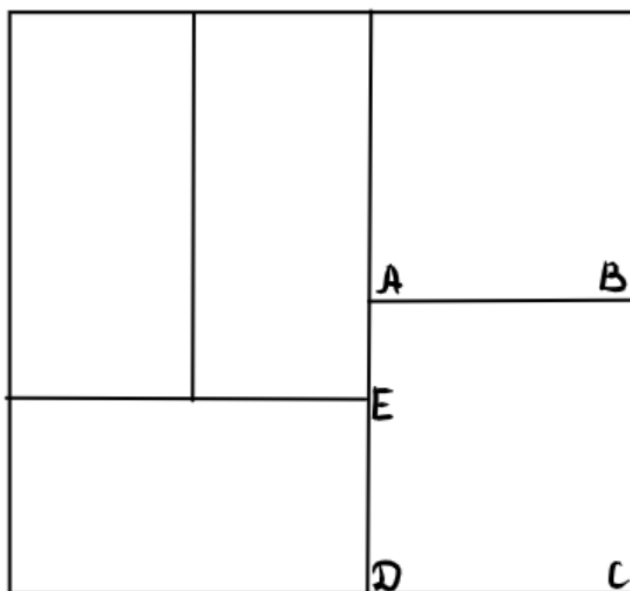
1. Саша написал на карточках по одному разу все цифры 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9 и все карточки, кроме 0 и 7, отдал Паше. Паша, используя все свои восемь карточек, выложил два натуральных числа. Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?
2. Рассматривается параллелограмм $FDCM$. Прямая a проходит через точку M , пересекает отрезок FC в точке K , а прямые FD и DC в точках E и P соответственно. Докажите, что $MK = \sqrt{KE \cdot KP}$.
3. Неотрицательные числа a и b таковы, что $a^2+a=b^2+b+1$. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел a и b .
4. Сколько имеется различных натуральных четных семизначных чисел, в десятичной записи каждого из которых используются ровно две различные цифры?
5. Существует ли натуральное число, имеющее ровно 2021 натуральный делитель, которое делится на 2022?
6. Какое наибольшее количество уголков из трех клеток можно разместить на доске 7×7 , если любым двум уголкам запрещено иметь даже одну общую точку?

8 класс

1. Приведите пример пары натуральных чисел x и y таких, что x больше y на $x\%$ и $x > 300$. Докажите, что найденная пара чисел удовлетворяет условию задачи.
2. Известно, что $ab - 2b - 3a + 5,4 > 0$ и $b > 3$. Докажите, что $a > 2$.
3. Назовем число *авторитетным*, если его можно представить в виде суммы двух чисел, каждое из которых получается из него перестановкой цифр. Является ли авторитетным число 98765432021?
4. Сколькими способами можно расшифровать ребус:
 $C \cdot O \cdot L \cdot O \cdot M \cdot O \cdot H = B \cdot Y \cdot I \cdot D \cdot I \cdot B \cdot O \cdot H$? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.
5. В треугольнике ABC точки P и M лежат на стороне BC , причём P между B и M . Через середину отрезка AP и точку C проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке K , а отрезок AM в точке T . Оказалось, что $\angle ABC = \angle MAC$, а прямые AP и CK перпендикулярные. Докажите, что $AKPT$ – ромб.
6. Какое наибольшее число уголков из трёх клеток можно разместить на доске 7×7 так, что никакие два уголка не имеют общей стороны (но могут иметь общие вершины)?

7 класс

1. При делении натурального числа x на натуральное число y в остатке получилось 9. Известно, что точное частное от деления x на y равно десятичной дроби $96,12$. Найдите x и y .
2. Между некоторыми (возможно, всеми) цифрами числа 333222111 поставили плюсы так, чтобы полученная сумма делилась на 15. Найдите наибольшую возможную сумму.
3. Квадрат разрезали на 5 прямоугольников одинаковой площади, при этом отрезок AE имеет длину 1 см. Найдите площадь квадрата и стороны

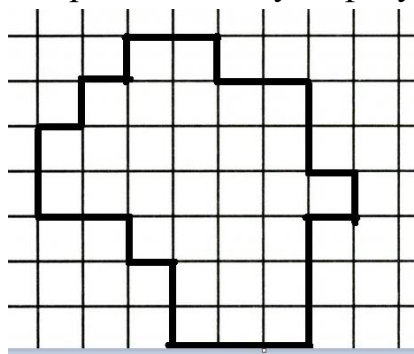


прямоугольника $ABCD$.

4. Кощей Бессмертный и Иван Царевич решили завести соцсети. Иван Царевич завел страницу в TikTok, а Кощей Бессмертный - в Instagram. Через полгода ведения соцсетей оба сказочных героя набрали неплохое число подписчиков, причем Кощей Бессмертный обогнал по числу подписчиков Ивана Царевича. Во время 7-го месяца Кощей Бессмертный был вынужден подавлять бунт в своем царстве и слегка забросил ведение инстаграмм, из-за чего число его подписчиков к концу месяца сократилось на 5%. Иван Царевич в это же время объявил о помолвке с Василисой Премудрой, благодаря чему привлек новых почитателей, и число его подписчиков выросло на 14%. В конце 7-го месяца оказалось, что Иван Царевич опережает Кощея Бессмертного по числу подписок на 2%. На сколько процентов число подписчиков у Ивана Царевича было меньше, чем у Кощея Бессмертного через полгода ведения соцсетей?
5. Миша и Леша играют в игру: по очереди из мешка, где лежит 2019 конфет, вытаскивают либо 2 либо 5 конфет. Пропускать ходы нельзя! Побеждает тот, кто сделает последний ход. Первым берет конфеты Миша. Кто победит при правильной игре и почему?

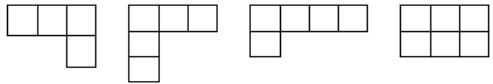
6 класс

1. В шестизначном числе АБВГДЕ разные буквы обозначают разные цифры, причём в этом числе нет нуля. Известно, что сумма чисел АБ и ВГ равна числу ДЕ. Напишите самое большое такое шестизначное число.
2. Между некоторыми (возможно, всеми) цифрами числа 332211 поставили плюсы (например, $3+32+211$) так, чтобы полученная сумма делилась на 15. Найдите сумму всех возможных сумм.
3. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на три одинаковые фигуры.



4. Банк выплачивает кэшбек в размере 1 рубль за каждые полные 100 рублей покупки, сделанной с помощью банковской карты (то есть, например, и за покупку на сумму 602 рубля, и на сумму 699 рублей на карту будет начислено по 6 рублей кэшбека). Какой наибольший бонус можно получить, имея 2000 рублей и покупая только тетради по 32 рубля за штуку и обложки по 14 рублей за штуку?
5. За круглом столом сидят 2021 человек, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда врет). Каждый сказал: "Не считая меня и моих соседей, рыцарей в кругу не более одного". Сколько рыцарей могло быть? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

5 класс

1. В шестизначном числе АБВГДЕ разные буквы обозначают разные цифры, причём в этом числе нет ни нуля, ни девятки, ни двойки. Известно, что сумма чисел АБ и ДЕ равна числу ВГ. Напишите, чему может быть равно число АБВГДЕ (достаточно привести хотя бы один вариант).
2. В ребусе МАША+МАША+МАША=АСКАР одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы - разные цифры. Найти все решения этого ребуса и доказать, что других решений нет.
3. Имеется по 20 фигур, каждого из  четырёх видов (см. рис), состоящих из одинаковых квадратиков. Можно ли, используя все эти фигуры (80 штук), сложить квадрат? (Квадрат должен быть без «дырок», фигуры не могут накладываться друг на друга. Фигуры можно поворачивать и переворачивать). Если можно, покажите как; если нет – объясните почему.
4. Купили банан, арбуз и апельсин. Апельсин весит в 3 раза больше банана. Банан – на 3 кг меньше арбуза. Арбуз – в 4 раза больше, чем банан и апельсин, вместе взятые. Сколько весит вся покупка?
5. В каждой клетке квадратного поля 3x3 стоит один из представителей двух племён: рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Назовём соседями двух человек, стоящих в клетках, имеющих общую сторону. Каждый из девятерых, стоящих в клетках, произнёс фразу: «Среди моих соседей не менее двух лжецов». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди них?